

Logarithmusfunktionen

und weil sie zusammen gehören auch

Exponentialfunktionen

Grundeigenschaften

Wie man ihre Schaubilder zeichnet
und wie man aus dem Schaubild ihre Gleichung erkennt.

Dieser Text ist einmalig in seiner Art!

Behandlung ohne Ableitungen

Ein Trainingsheft für Klasse 9/10
und Oberstufe

Datei Nr. 18150

Stand: 23. März 2016

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

	Übersicht über die behandelten Funktionen	3
1	Vorkenntnisse zu Logarithmen – Wiederholungen	5
	Testaufgaben dazu	6
2	Wiederholung elementarer Exponentialfunktionen	8
3	Bedeutung von Umkehrfunktionen	12
	Trainingsaufgaben 1	16
	Trainingsaufgaben 2	20
4	Verschobene Exponential- und Logarithmuskurven	1
4.1	Wie verschiebt man Punkte?	21
4.2	Wie verschiebt man Kurven?	22
4.3	Verschobene Exponentialkurven	23
	Zeichenmethode	24
	Identifizierung einer verschobenen Exponentialkurve	26
	Charakteristisches Trapez für Exponentialkurven	26
4.4	Verschobene Logarithmuskurven	27
	Zeichenmethode: Wertetafel zur Umkehrfunktion	27
	Identifizierung einer verschobenen Logarithmuskurve	31
	Charakteristisches Trapez für Logarithmuskurven	31
4.5	An der y-Achse gespiegelte Logarithmuskurven	36
	Zeichenmethoden: Wertetafel zur Umkehrfunktion	37
	Identifizierung einer verschobenen Logarithmuskurve	41
4.5	Logarithmusfunktionen zur Basis e	45
	Trainingsaufgabe 3	48
5	Gestreckte Logarithmuskurven	49
6	Aufgabensammlung:	
	29 Aufgaben, erstellt aus Beispielen dieses Heftes mit Angaben, auf welchen Seiten die Lösungen nachzulesen sind.	
	Wichtig für Lehrer als Sammlung und für Schüler zum Wiederholen.	
	Hier bekommt man auch eine Übersicht über den Stoff.	52
7	Lösungsteil	
	Lösungen zur Trainingsaufgabe 1	56
	Lösungen zur Trainingsaufgabe 2	58
	Lösungen zur Trainingsaufgabe 3	59

Übersicht über die behandelten Funktionen

Umkehrfunktionen

$y = \log_2 x$	und $y = 2^x$	13
$y = \log_3 x$	und $y = 3^x$	15
$y = \log_{0,5} x = -\log_2 x = \log_2 \left(\frac{1}{x}\right)$	und $y = 0,5^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$	18
$y = \log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x = \log_3 \left(\frac{1}{x}\right)$	und $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{3^x} = 3^{-x}$	20
$f(x) = \log_4 x$	und $y = 4^x$	26
$f(x) = \log_{2,5} x$	und $y = 2,5^x$	26
$f(x) = \log_{1,5} x$	und $y = 1,5^x$	57
$f(x) = \ln x$	und $y = e^x$	57
$f(x) = \log_{0,25} x$ bzw. $y = -\log_4 x$	und $y = 0,25^x$ bzw. $y = 4^{-x}$	58
$f(x) = \log_{2/3} x$	und $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$	58

Verschobene Exponentialkurven

Zeichnen:

$y = 2^{x+2}$	$y = 2^x + 2$	$y = 2^{x-2} - 2$	23
$y = 3^{x+1}$			24
$y = 1,5^{x-2} - 3$			25

Aus der Abbildung identifizieren:

$y = 1,5^x$	$y = 1,5^{x-2} - 3$	$y = 4^{x+1} + 1$	26
-------------	---------------------	-------------------	----

Verschobene Logarithmuskurven

Zeichnen:

$f(x) = \log_2 x + 3$	27
$f(x) = \log_2 (x + 3)$	28
$f(x) = \log_2 (x - 1) - 2$	29
$f(x) = \log_{0,5} (x + 1) + 4$ bzw. $f(x) = -\log_2 (x + 1) + 4$	30

Aus der Abbildung identifizieren:

$y = \log_6 (x + 4)$	31
$y = \log_2 (x - 2,5) - 1$	32
$y = \log_{1,5} (x - 1,5) + 1$	33
$y = \log_{0,25} (x + 4) + 1$ bzw. $y = -\log_4 (x + 4) + 1$	34
$y = -\log_3 (x - 2) - 2$ bzw. $y = \log_{\frac{1}{3}} (x - 2) - 2$	35

Gespiegelte Logarithmuskurven

Zeichnen:

$$f(x) = \log_4(-x) \quad 37$$

$$f(x) = \log_{0,25}(-x) \quad \text{bzw.} \quad f(x) = -\log_4(-x) \quad 38$$

$$f(x) = \log_3(-x + 2) \quad 39$$

$$f(x) = \log_2(-x - 1) + 2 \quad 40$$

Aus der Abbildung identifizieren:

$$y = \log_5(-x) \quad 41$$

$$y = \log_{2,5}(-x) - 2 \quad 42$$

$$y = \log_3(-x + 4) + 1 \quad 43$$

$$y = -\log_6(-x) + 2 \quad \text{bzw.} \quad y = \log_{\frac{1}{6}}(-x) + 2 \quad 44$$

Logarithmen zur Basis e

Zeichnen:

$$y = \ln x \quad 45$$

$$y = \ln x + 3 \quad \text{und} \quad y = -\ln x - 2 \quad 46$$

Aus der Abbildung identifizieren:

$$y = \ln(-x) + 3 \quad \text{und} \quad y = -\ln(-x + 4) \quad 47$$

Trainingsaufgaben zur Basis e

Aus der Abbildung identifizieren

48

Gestreckte Logarithmuskurven

Zeichnen:

$$y = \log_2(2x) \quad \text{bzw.} \quad y = 1 + \log_2 x \quad 49$$

$$y = 2 \cdot \log_3(x) \quad 50$$

$$y = 4 \cdot \log_4(x + 2), \quad y = \log_4\left(-\frac{1}{2}x + 4\right) \quad y = 2 \cdot \log_3(3x) \quad \text{und} \quad y = 2 \cdot \log_3(3x) \quad 51$$

Große Aufgabensammlung aus allen Funktionen/Kurven dieses Textes zusammengestellt: 52

1. Vorkenntnisse zu Logarithmen Wiederholungen

Dieser Text setzt voraus, dass man Grundkenntnisse über Logarithmen hat. Diese sollen hier kurz wiederholt werden.

Um Potenzen nach dem Exponenten umstellen zu können, hat man die Logarithmen erfunden.

Beispiele:

- a) In der Potenzgleichung $2^3 = 8$ nennt man 2 die Basis und 3 ihren Exponenten.
Man kann aber auch sagen:

„3 ist der Exponent, den die Basis 2 braucht, damit man das Ergebnis 8 erhält.“

Oder derselbe Satz kürzer formuliert:

„3 ist der Logarithmus zur Basis 2 von 8.“

$2^3 = 8$ ist also gleichbedeutend zu $\log_2 8 = 3$

- b) In der Potenzgleichung $4^2 = 16$ nennt man 4 die Basis und 2 ihren Exponenten.
Man kann aber auch sagen:

„2 ist der Exponent, den die Basis 4 braucht, damit man das Ergebnis 16 erhält.“

Oder derselbe Satz kürzer formuliert:

„2 ist der Logarithmus zur Basis 4 von 16.“

$4^2 = 16$ ist also gleichbedeutend zu $\log_4 16 = 2$

- c) In der Potenzgleichung $2^{-1} = \frac{1}{2}$ nennt man 2 die Basis und -1 ihren Exponenten.
Man kann aber auch sagen:

„-1 ist der Exponent, den die Basis 2 braucht, damit man das Ergebnis $\frac{1}{2}$ erhält.“

Oder derselbe Satz kürzer formuliert:

„-1 ist der Logarithmus zur Basis 2 von $\frac{1}{2}$.“

$2^{-1} = \frac{1}{2}$ ist also gleichbedeutend zu $\log_2 \frac{1}{2} = -1$

- d) In der Potenzgleichung $9^{\frac{1}{2}} = 3$ nennt man 9 die Basis und $\frac{1}{2}$ ihren Exponenten.
Man kann aber auch sagen:

„ $\frac{1}{2}$ ist der Exponent, den die Basis 9 braucht, damit man das Ergebnis 3 erhält.“

Oder derselbe Satz kürzer formuliert:

„ $\frac{1}{2}$ ist der Logarithmus zur Basis 9 von 3.“

$9^{\frac{1}{2}} = 3$ (d. h. $\sqrt{9} = 3$) ist also gleichbedeutend zu $\log_9 3 = \frac{1}{2}$

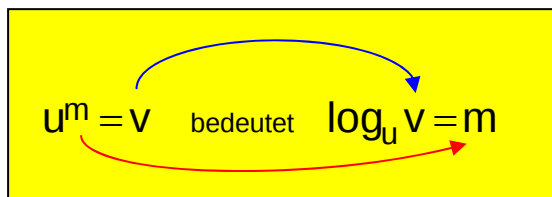
Übungen zum Umstellen von Gleichungen:

a) $a = b^n$ ist gleichwertig zu $\log_b a = n$

$y = 2^x$ ist gleichwertig zu $\log_2 y = x$

$3^{-x} = z$ ist gleichwertig zu $\log_3 z = -x$

Merke: Das Ergebnis der Potenzierung steht hinter dem Logarithmus und heißt sein „Argument“. Und der Exponent ist dessen Logarithmus.



b) $\log_4 64 = 3$ denn es ist $4^3 = 64!$

$\log_2 3 = 8$ ist falsch, denn es ist $2^3 = 8$ und nicht $2^8 = 3$.

Richtig: $\log_2 8 = 3$, $\log_2 3$ ist keine natürliche Zahl!

$m = \log_b z$ bedeutet $z = b^m$

$y = \log_b x$ bedeutet $x = b^y$.

Kleine Testaufgaben:

(1) Forme in eine Logarithmusgleichung um:

a) $6^2 = 36$

b) $12^{-1} = \frac{1}{12}$

c) $3^4 = 81$

d) $25 = 5$

e) $y = 3^x$

f) $y = 2^{-x+1}$

(2) Forme in eine Exponentialgleichung (Potenzrechnung) um (und versuche x zu berechnen):

a) $\log_3 x = 5$

b) $\log_x 8 = 3$

c) $\log_2 \frac{1}{16} = x$

(3) Berechne diese Logarithmen. Verwende dazu Potenzen!

a) $\log_6 6$

b) $\log_4 2$

c) $\log_3 81$

d) $\log_8 64$

e) $\log_3 (-3)$

f) $\log_a 1$

Lösungen der Testaufgaben

(1) Forme in eine Logarithmusgleichung um:

- a) $6^2 = 36 \Leftrightarrow \log_6 36 = 2$
- b) $12^{-1} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \log_{12} \frac{1}{12} = -1$
- c) $3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4$
- d) $25^{\frac{1}{2}} = 5 \Leftrightarrow \log_{25} 5 = \frac{1}{2}$
- e) $y = 3^x \Leftrightarrow \log_3 y = x$
- f) $y = 2^{-x+1} \Leftrightarrow \log_2 y = -x + 1$

(2) Forme in eine Exponentialgleichung (Potenzrechnung) um (und versuche x zu berechnen):

- a) $\log_3 x = 5 \Leftrightarrow x = 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$
- b) $\log_x 8 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 8 \text{ also } x = \sqrt[3]{8} = 2$
- c) $\log_2 \frac{1}{16} = x \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{16} \text{ Man schreibt um: } \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$
 Aus $2^x = 2^{-4}$ erkennt man dann $x = -4$.

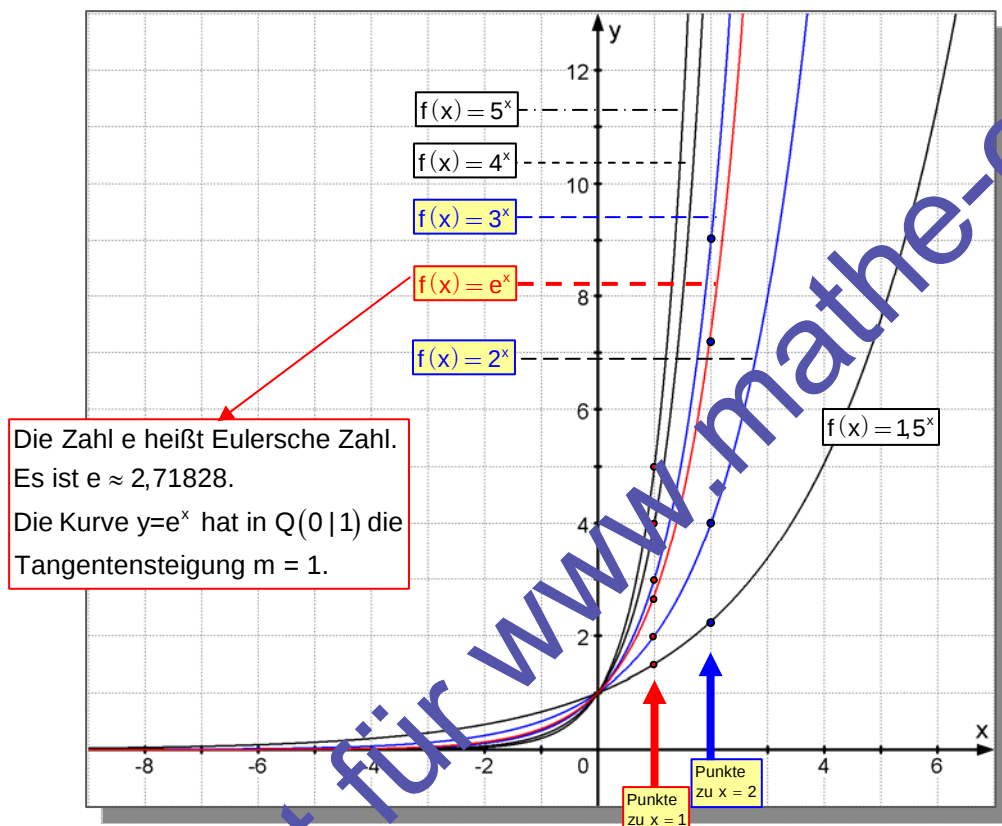
(3) Berechne diese Logarithmen. Verwende dazu Potenzen!

- a) $\log_6 6 = x \Leftrightarrow 6^x = 6 \text{ mit } x = 1.$
- b) $\log_4 2 = x \Leftrightarrow 4^x = 2 \text{ mit } x = \frac{1}{2}, \text{ denn } 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2.$
- c) $\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \text{ mit } x = 4, \text{ denn } 3^4 = 81.$
- d) $\log_8 64 = x \Leftrightarrow 8^x = 64 \text{ mit } x = 2, \text{ denn } 8^2 = 64.$
- e) $\log_3 (-3) = x \Leftrightarrow 3^x = -3 \text{ keine Lösung, da 3 durch Potenzieren nie negativ wird!}$
- f) $\log_a 1 = x \Leftrightarrow a^x = 1 \text{ mit } x = 0, \text{ denn für jedes a gilt } a^0 = 1 \text{ !}$

2. Wiederholung elementarer Exponentialfunktionen

Dieser Text setzt voraus, dass man Grundkenntnisse Exponentialfunktionen hat. Diese sollen hier wiederholt werden.

- (1) Die Schaubilder der Funktionen $f(x) = a^x$ mit einer Basis $a > 1$ haben einen ähnlichen Verlauf, wie dieses Schaubild zeigt:



Man berechnet einige Punkte mittels Wertetafel und zeichnet sie ein. Mit rot sind die Punkte zu $x = 1$ eingetragen: $1,5^1 = 1,5$, $2^1 = 2$ usw. Mit blau sind die Punkte zu $x = 2$ markiert: $1,5^2 = 2,25$, $2^2 = 4$ usw. Im negativen Bereich wird die Kopfrechnung schwieriger: $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$, $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$

Man sollte folgende Eigenschaften WISSEN: (Es sei jetzt $a > 1$)

- (1) Alle Kurven $y = a^x$ gehen durch $Q(0 | 1)$, weil $a^0 = 1$ ist.
- (2) a^x sind stets positive Werte, also hat jede dieser Funktionen die Wertmenge $W = \mathbb{R}^+$.
- (3) Für $x \rightarrow -\infty$ gehen die Werte gegen 0, also ist die negative x-Achse waagrechte Asymptote.
- (4) Diese Funktionen wachsen streng monoton, d.h. nach rechts werden die Werte stets größer, was man so beschreiben kann: Wenn $x_1 > x_2$ ist, dann ist auch $a^{x_1} > a^{x_2}$.
- (5) Für $x \rightarrow \infty$ gehen die Werte gegen Unendlich.
- (6) Die Kurven haben alle Linkskrümmung.